TRAZADOS XEOMÉTRICOS FUNDAMENTAIS NO PLANO

1. PUNTO E RECTA

O punto e a recta son dous elementos xeométricos básicos.

Un **punto** é un elemento adimensional que nos indica unha posición no plano. Indícase con dous trazos perpendiculares e noméase con letras maiúsculas (punto **A**).

Unha **liña recta** é unha sucesión infinita de puntos dispostos nunha mesma dirección. Noméase con letras minúsculas (recta **m**).

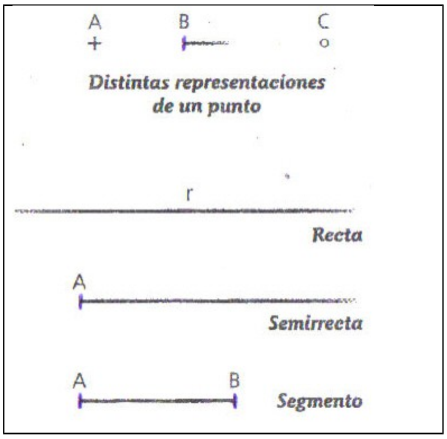
Un **segmento** é a porción dunha recta comprendida entre dous puntos, aos que chamamos extremos do segmento. Indícase con trazos perpendiculares sobre a recta nos extremos e noméase con dúas letras maiúsculas cun suliñado superior (segmento $\overline{AB}$).

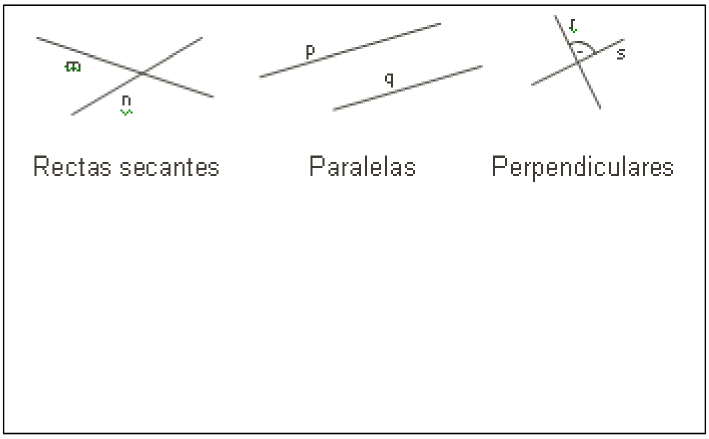
Unha **semirrecta** é un unha recta limitada por un punto nun dos seus extremos.

Rectas secantes son as que se cortan determinado un punto común.

Rectas paralelas son as que non teñen ningún punto en común, manténdose sempre á mesma distancia.

Rectas perpendiculares son as que se cortan formando un ángulo recto, é dicir un ángulo de 90º.



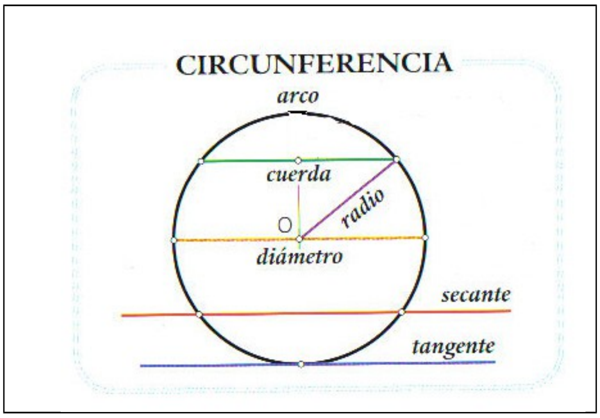


2. LUGARES XEOMÉTRICOS

Lugar xeométrico é o conxunto de puntos que cumplen unha determinada condición ou propiedade. Tres exemplos de lugares xeométricos son:

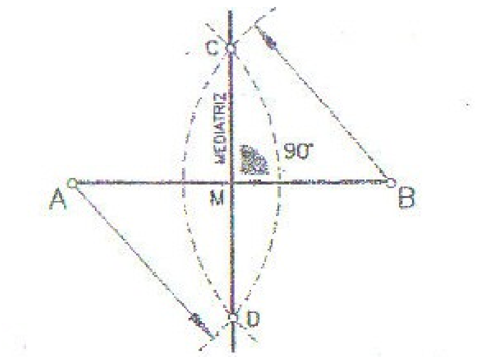
- **Circunferencia**: é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dun punto fixo chamado centro da circunferencia. Determínase indicando o seu centro e o seu radio.

Cando unha recta corta a unha circunferencia en dous puntos é unha **recta secante**, se só hai un único punto en común entre recta e circunferencia é unha **recta tanxente**, sendo dito punto o **punto de tanxencia**.



- **Diámetro**: segmento que une dous puntos dunha circunferencia pasando polo seu centro.
- **Radio**: segmento que une un punto dunha circunferencia co seu centro, a súa lonxitude é a metade do diámetro.
- **Corda**: segmento que une dous puntos calquera dunha circunferencia sen pasar polo seu centro.
- **Arco**: parte da circunferencia comprendida entre dous puntos ou correspondente a unha corda ou diámetro.

- **Mediatriz**: é o lugar xeométrico dos puntos dun plano que equidistan dos extremos dun segmento. Tamén se pode definir como unha recta perpendicular a un segmento no seu punto medio.

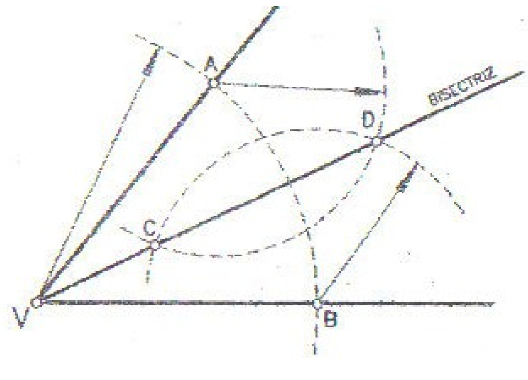


Construción:

1-Trazamos desde os extremos do segmento, *A* e *B*, arcos do mesmo radio que sexa maior ca a metade da lonxitude do segmento.

2-Unindo os puntos intersección de ambos arcos, *C* e *D*, determinamos a mediatriz do segmento.

- **Bisectriz**: é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos lados dun ángulo. Tamén se pode definir como unha recta que divide en dúas partes iguais un ángulo.



Construción:

1-Con centro no vértice do ángulo, *V*, trazamos un arco de radio arbitrario, que corta en *A* e *B* os lados do ángulo.

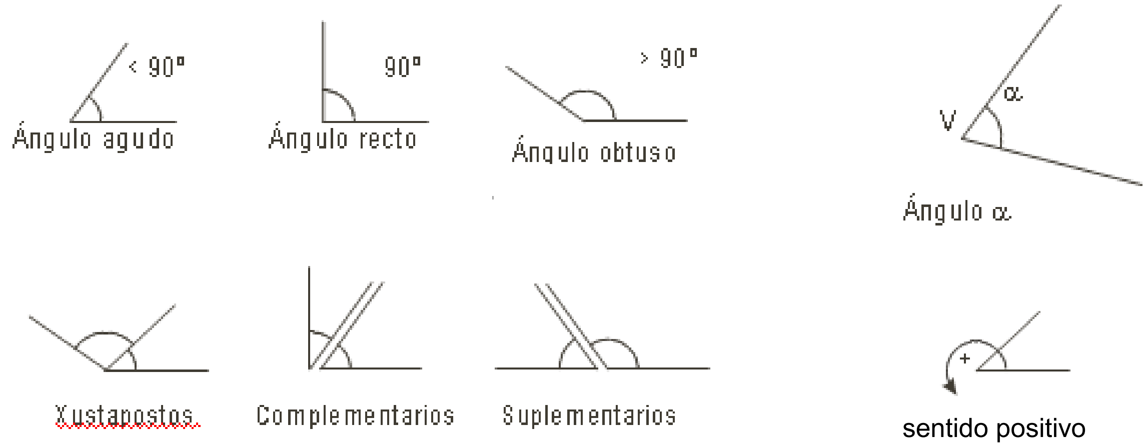
2- Con centro en *A* e *B* trazamos dous arcos de igual radio que se corten nun punto, *C* ou *D*.

3-Unindo *C* ou *D* co vértice *V* determinamos a bisectriz do ángulo.

3. ÁNGULOS

Un **ángulo** é a porción de plano limitada por dúas semirrectas (lados do ángulo) que teñen o mesmo extremo (vértice do ángulo). Os ángulos noméase utilizando unha letra maiúscula ou unha letra grega minúscula.

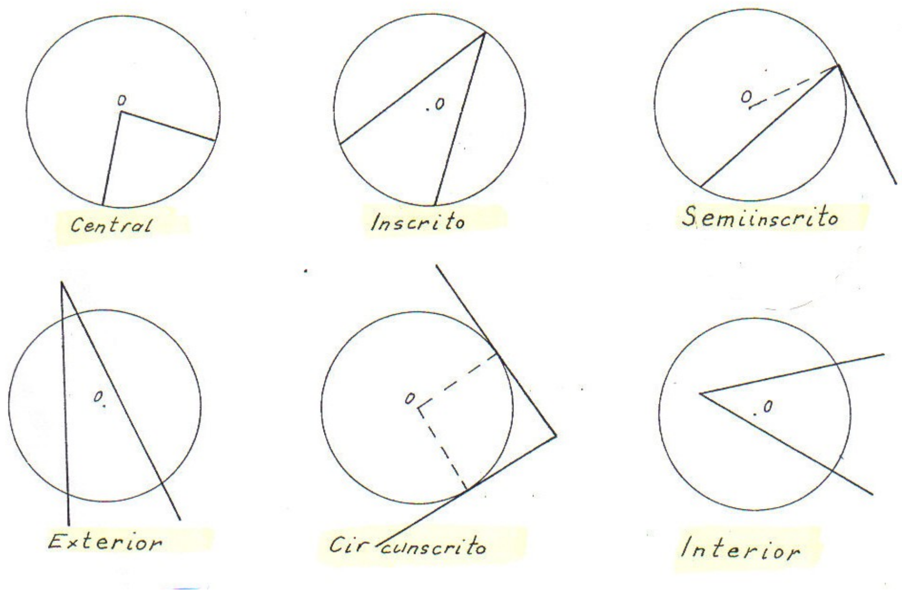
Dous ángulos son **complementarios** cando o valor da súa suma é de 90º, e son **suplementarios** cando suman 180º. Decimos que dous ángulos son xustapostos cando comparten un lado e o vértice.



sentido positivo

En relación a unha circunferencia diferénciase entre os seguintes tipos de ángulos:

- Ángulo central: o seu vértice é o centro da circunferencia.
- Ángulo interior: o seu vértice é un punto interior á circunferencia.
- Ángulo exterior: o seu vértice é un punto exterior á circunferencia.
- Ángulo circunscrito: é un ángulo exterior cos dous lados tanxentes á circunferencia.
- Ángulo inscrito: ten o seu vértice na circunferencia.
- Ángulo semiinscrito: é un ángulo inscrito cun dos lados tanxente á circunferencia.



4. TRAZADO DE PARALELAS E PERPENDICULARES UTILIZANDO ESCUADRO E CARTABÓN

Nas seguintes imaxes indícase como colocar o escuadro e o cartabón para trazar paralelas (figura 1) e perpendiculares (figura 2) a unha recta dada (recta r). Nos dous casos faise coincidir a hipotenusa do escuadro coa recta dada, apoiando un dos seus catetos na hipotenusa do cartabón, que ten que permanecer fixo. Para trazar paralelas desprazamos directamente o escuadro sobre o cartabón. Para trazar perpendiculares, primeiro xiramos o escuadro facendo que apoie no cartabón co outro cateto e logo desprazámolo mantendo sempre fixo o cartabón.

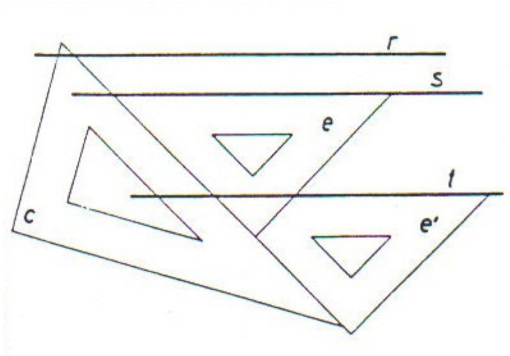


Figura 1

Posición das plantillas no trazado de liñas paralelas

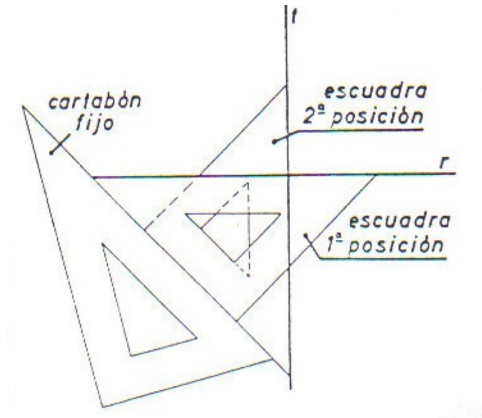


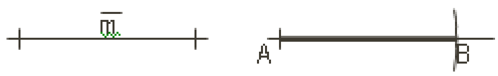
Figura 2

Posición das plantillas no trazado de liñas perpendiculares

5. OPERACIÓNS ELEMENTAIS

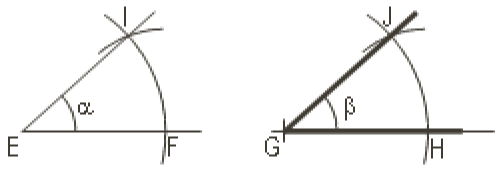
– Transporte dun segmento

Sendo *m* o segmento que se quere transportar sobre unha recta dada, collemos co compás a súa lonxitude e facendo centro nun punto *A* da recta trazamos un arco que a corte dando lugar ao extremo *B*.



– Transporte dun ángulo

Sexa α o ángulo de vértice *E* que se desexa transportar sobre unha recta obtendo o ángulo transportado b de vértice *G*.



Construción:

1-Partimos dun punto *G* situado sobre unha recta, dando lugar ao primeiro lado do ángulo.

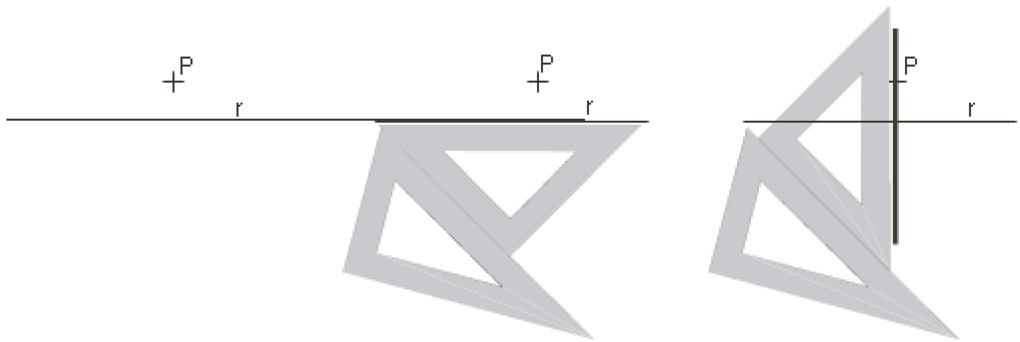
2-Trazamos dous arcos do mesmo radio a partir dos punto *E* e *G*.

3-Collemos a lonxidude *IF* no ángulo inicial e trasladámola a partir do punto *H* cortando ao segundo arco en *J*.

4-Unindo o vértice *G* con *J* obtemos o segundo lado do ángulo.

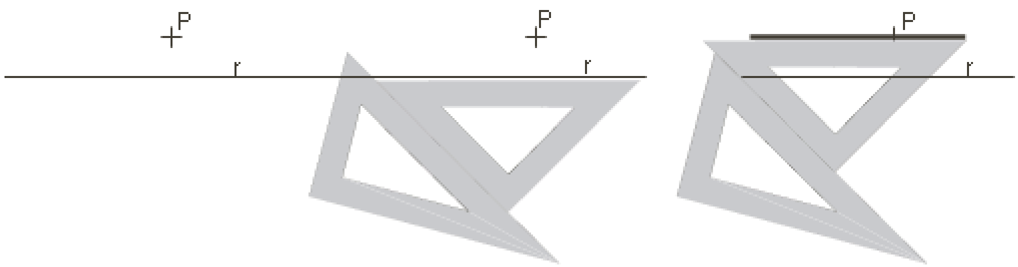
– Perpendicular a unha recta desde un punto

Na seguinte imaxe podemos apreciar como trazar unha perpendicular a unha recta, pasando por un punto *P* exterior á mesma.



– Paralela a unha recta que pase por un punto exterior

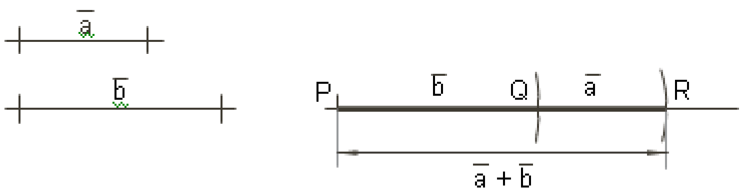
Nesta imaxe podemos ver como trazar unha paralela a unha recta, pasando por un punto *P* exterior á mesma.



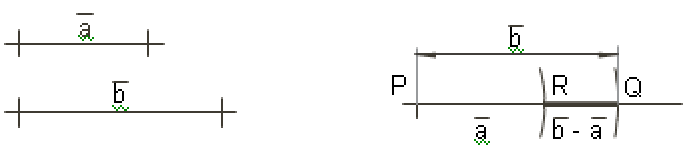
– Operacións con segmentos

a) <u>Suma e diferenza de segmentos</u>

Para realizar a suma dos segmentos *a* e *b,* trasladamos a partir dun punto P dunha recta as lonxitudes de ambos de modo consecutivo, colléndoas co compás e trazando arcos sobre a recta. Obtemos como resultado o segmento $\overline{PR}$.



Para restarlle ao segmento *b* o segmento *a* trasladamos a partir dun punto P dunha recta as súas lonxitudes superpoñéndoas, para elo collémolas co compás e trazamos arcos sobre a recta. Obtemos como resultado o segmento $\overline{RQ}$.



b) <u>División dun segmento en partes iguais utilizando o teorema de Tales</u>

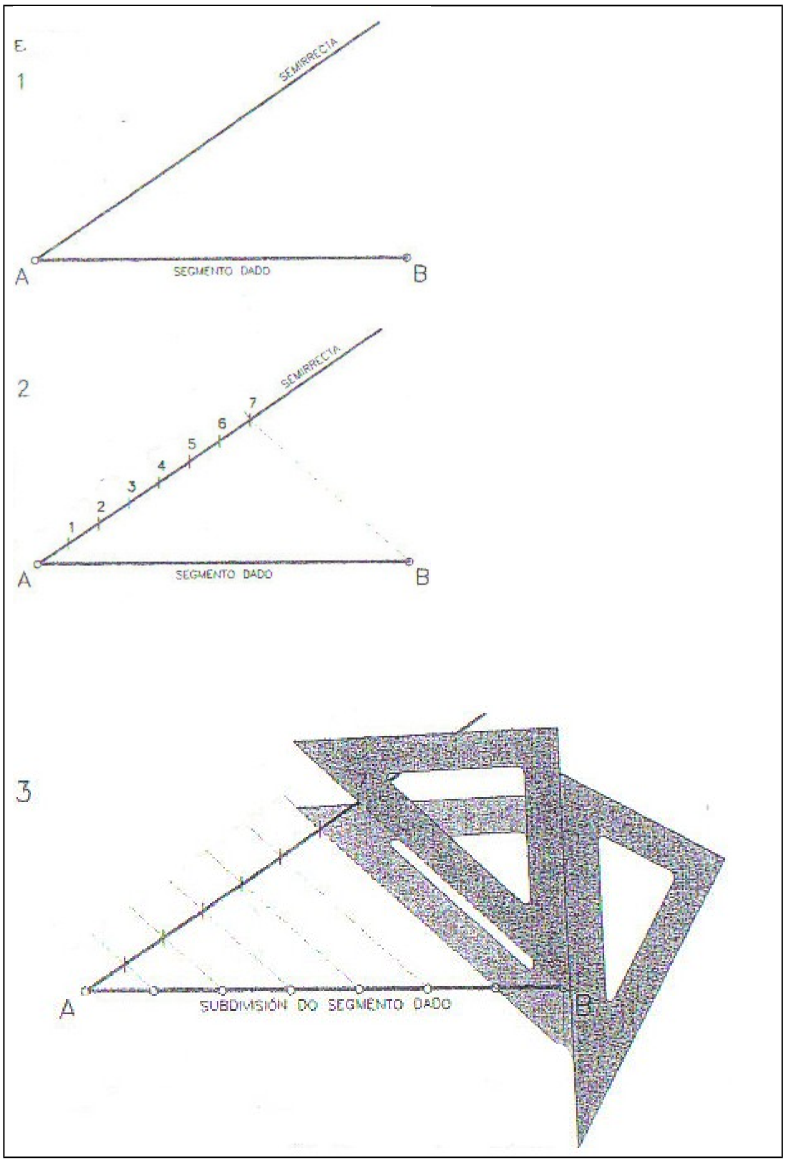
Utilizando o teorema de Tales podemos dividir un segmento en partes iguais. Por exemplo se queremos dividir un segmento en 7 partes iguais procedemos do seguinte xeito:

1- A partir dun dos extremos do segmento, neste caso a partir de *A*, trazamos unha semirecta seguindo unha dirección calquera.

2- Sobre a semirrecta e a partir da súa orixe *A* levamos 7 unidades iguais (podemos facelo coa regra ou co compás, levando sempre a mesma medida).

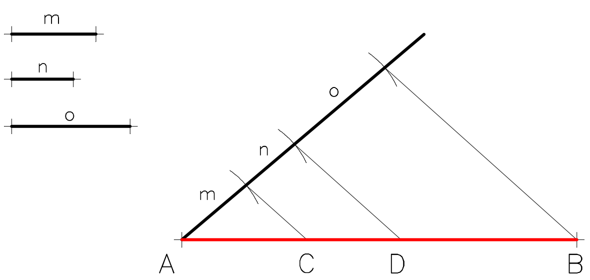
3- Unimos o último punto obtido sobre a semirrecta, o punto *7*, co extremo *B* do segmento.

4- Por último, trazaremos paralelas a esta liña, *7B*, partindo de todas as divisións intermedias (puntos *6, 5, 4, 3, 2 e 1*).



-

c) <u>División dun segmento en partes proporcionais ás lonxitudes doutros segmentos utilizando o teorema de Tales</u>



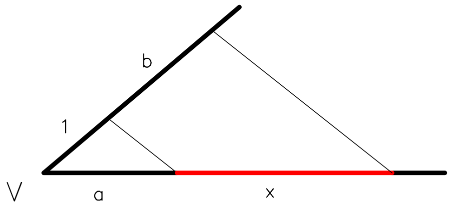
$$\frac{\overline{AC}}{m}=\frac{\overline{CD}}{n}=\frac{\overline{DB}}{o}$$

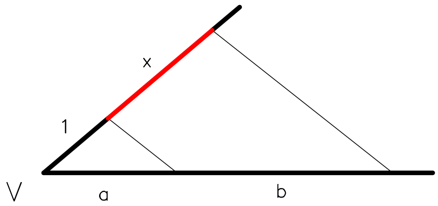
Construción:
1-Dado o segmento a dividir $\overline{AB}$ e os segmentos *m*, *n* e *o*; a partir de A trasladamos a lonxitude dos tres segmentos sobre unha liña que saia do punto A en calquera dirección.

2-Unimos o último extremo do segmento *o* co punto *B* e trazamos paralelas polas divisións intermedias dando lugar os puntos *C* e *D*.
Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ son proporcionais aos segmentos *m*, *n* e *o*.

d) <u>Multiplicación e división de dous segmentos utilizando o teorema de Tales</u>

Partindo de dous segmentos *a* e *b* e collendo a maiores un terceiro segmento de lonxitude a unidade, podemos calcular tanto o produto como o cociente de *a* e *b* (segmento *x*), tal e como se indica nas seguintes figuras. Procedemos de xeito análogo ao caso anterior.



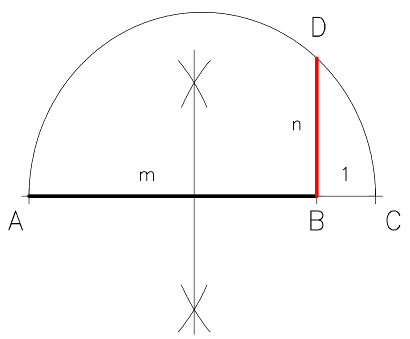


$$\frac{1}{a}=\frac{b}{x}\Rightarrow x=a\cdot b$$

$$\frac{1}{a}=\frac{x}{b}\Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

e) <u>Raíz cadrada dun segmento</u>

Na imaxe inferior indícase como calcular a raíz cadrada dunha lonxitude *m* correspondente a un segmento $\overline{AB}$.



Construción:
1-A partir do segmento *m* , engadimos un segmento de lonxitude a unidade dando lugar ao punto *C*.

2-Trazamos a mediatriz do segmento $\overline{AC}$ e debuxamos a semicircunferencia que lle corresponde.

3-Levantamos unha perpendicular desde *B* ata cortar a semicircunferencia obtendo o punto *D*, sendo $n=\sqrt{m}$.

nota: aplicando o teorema de pitágoras nos triángulos rectángulos ACD, ABD e BCD, demóstrase que $n=\sqrt{m}$.

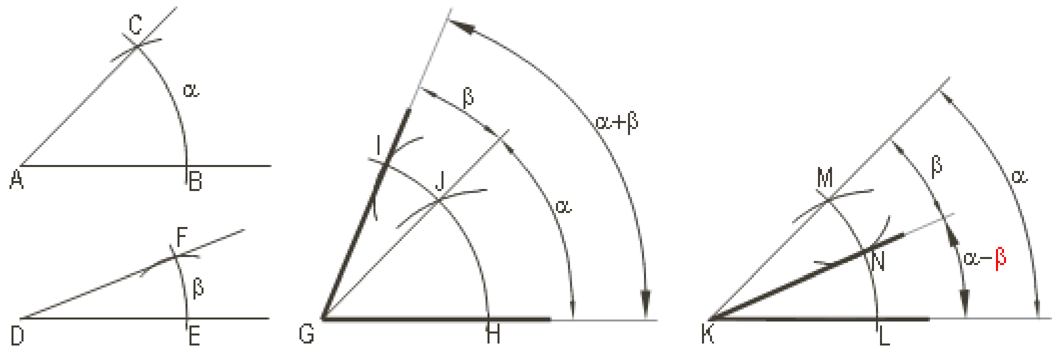
– Operacións con ángulos

a) Suma e diferenza de ángulos

Sexan os ángulos α e β.

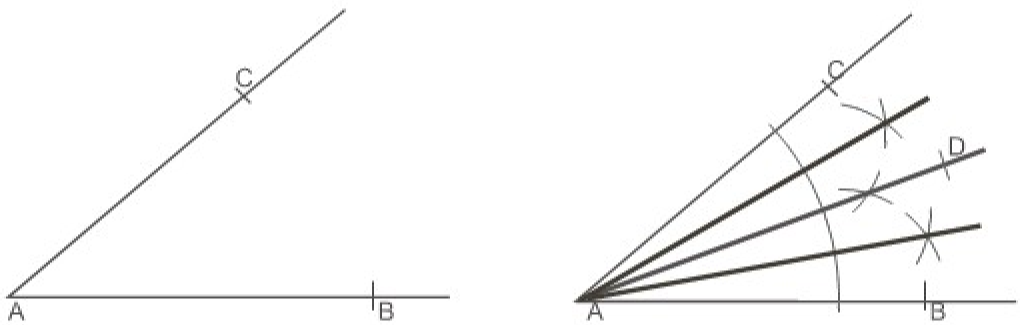
Para construír o ángulo **α+β**, transportamos a partir da semirrecta *GH* e en sentido positivo, os ángulos α e β, de modo que queden xustapostos.

Para construír o ángulo **α-β**, transportamos a partir da semirrecta *KL* e en sentido positivo o ángulo α, despois transportamos o ángulo β en sentido negativo, superpoñéndoo co ángulo anterior.

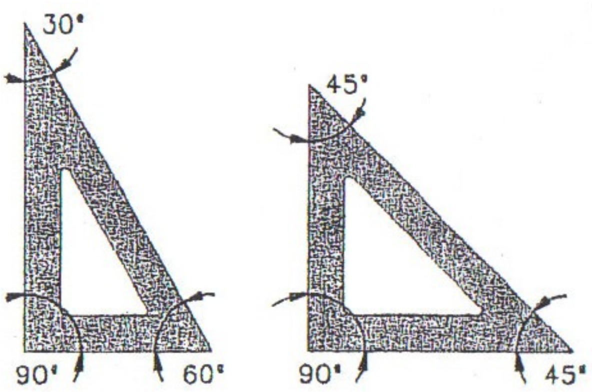


b) División dun ángulo en partes iguais

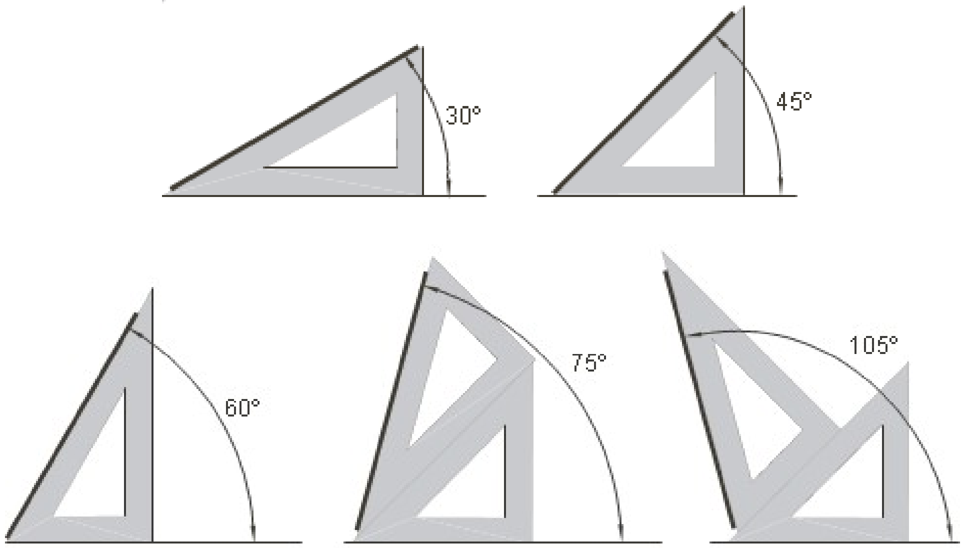
Dado o ángulo *BAC*. Ao trazar a bisectriz *AD* quedará dividido en 2 partes iguais. Se se trazan agora as bisectrices dos ángulos *BAD* e *DAC* divídese o ángulo *BAC* en 4 partes iguais. Outras catro bisectrices dividirano en 8 partes iguais e así sucesivamente.



6. TRAZADO DE ÁNGULOS CON ESCUADRO, CARTABÓN E COMPÁS

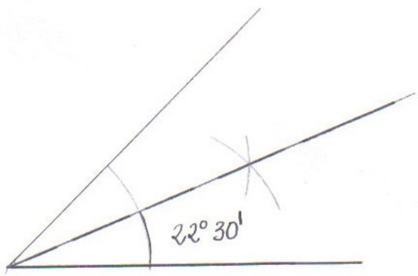


O escuadro e o cartabón sirven coma plantillas para o trazado de ángulos. Os dous son triángulos rectángulos (un ángulo de 90º, catetos e hipotenusa). Ademáis o escuadro é isósceles sendo os seus ángulos 90º, 45º e 45º; e o cartabón é escaleno sendo os seus ángulos 90º, 60º e 30º.
Como en calquera triángulo a suma dos tres ángulos é de 180º.



Trazar ángulos de 30º, 60º e 90º, non nos ofrece ningunha dificultade. Para trazar un ángulo de 75º teremos que sumar 45º+30º, e para trazar un ángulo de 105º teremos que sumar 45º+60º. No cadro indícanse as combinacións utilizando as dúas plantillas.

30º+45º=75º
30º+90º=120º
45º+60º=105º
45º+90º=135º
60º+60º=120º
60º+90º=150º



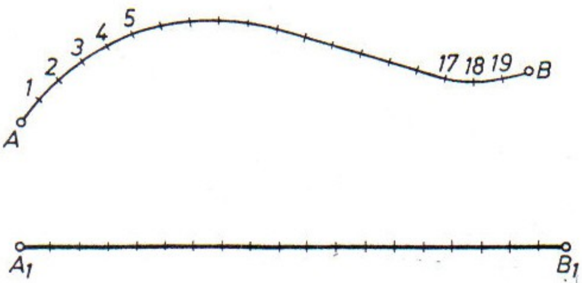
Por outra parte, a bisectriz dun ángulo de 30º, danos un ángulo de 15º, posto que dividimos o ángulo a metade. Do mesmo modo a metade de de 45º son 22º 30' (vinte e dous grados e trinta minutos, ou o que é o mesmo vinte e dous grados e medio). Isto permítenos facer máis combinacións.

7. RECTIFICACIÓN DA CIRCUNFERENCIA E DE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA

A rectificación dunha circunferencia ou arco consiste en determinar sobre unha liña recta a súa lonxitude seguindo un procedemento gráfico.

– Rectificación dunha curva

Dada unha curva *AB*, para rectificala teremos que dividila nunha serie de arcos de lonxitude moi pequena. A continuación, tomase a medida destes arcos e transportanse sobre a recta.



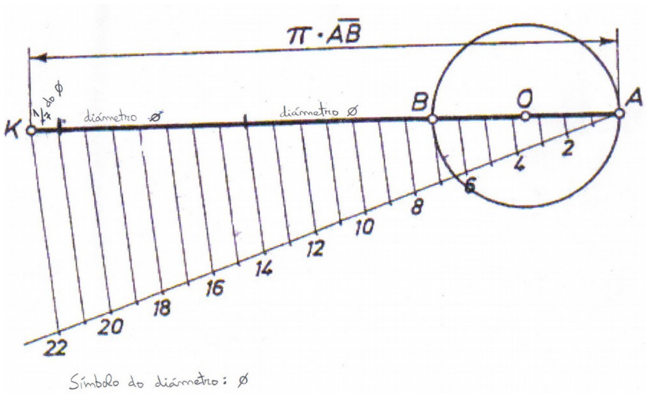
– Rectificación dunha circunferencia

1-Divídese o diámetro *AB* da circunferencia en 7 partes iguais.

2-Prolóngase *AB* e levamos sobre esta liña outros dous diámetros. Tres diámetros en total.

3-Por último sumámoslle a esta medida 1/7 do diámetro *AB*.

É dicir, dividimos o diámetro por 7 e collémos 22 veces a unidade resultante (7+7+7+1). A lonxitude do segmento resultante *KA* é lonxitude da circunferencia.



– Rectificación dunha semicircunferencia (figura 1)

1-Trazamos na circunferencia correspondente o lado do cadrado e do triángulo equilátero inscritos nela (debuxando ángulos de 30º e 45º como se indica na imaxe).

2-Colocamos de forma consecutiva o lado do triángulo equilátero e do cadrado partindo do punto *A*. A medida B_1C_1 é a lonxitude da semicircunferencia.

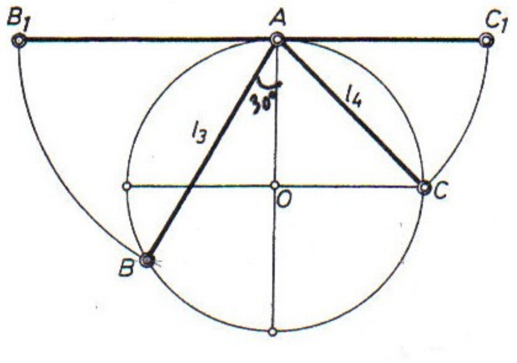


figura 1

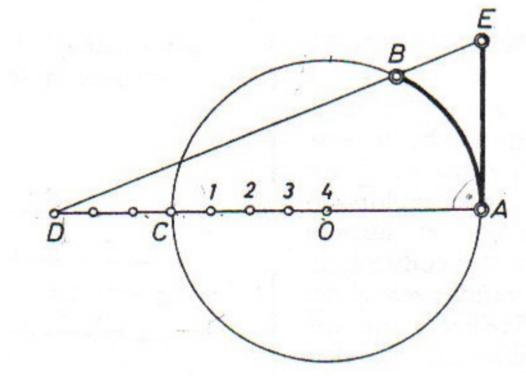


figura 2

– Rectificación dun arco de circunferencia menor de 90º (figura 2)

1-Dado o arco *AB* dunha circunferencia, divídese o radio da circunferencia en catro partes iguais.

2-Prolóngase o radio *OC* fóra da circunferencia e márcanse tres divisións máis iguais ás anteriores (3/4 do radio).

3-Unimos o punto *D* co punto *B* (sendo *AB* o arco que hai que rectificar) e prolongamos esta liña ata cortar a unha perpendicular ao diámetro polo punto *A*. Obtemos así o punto *E*.

4-O segmento *AE* é o arco *AB* da circunferencia rectificado.

8. A XEOMETRÍA NA HISTORIA E NO NOSO ENTORNO

A palabra xeometría, de orixe grego, significa medición da terra. Consíderase aos gregos os verdadeiros inventores da xeometría. Xa en civilizacións anteriores como a exipcia e a mesopotámica déixase notar a influencia da xeometría na arquitectura e na arte.

Tales de Mileto é considerado o fundador da xeometría na antiga grecia no século VI a.C. Destaca tamén a importancia do matemático grego Euclides, no século III a.C leva a cabo importantes investigacións e establece os principios da xeometría elemental, que son a base da xeometría plana. Autor dun conxunto de libros que denominou “Elementos”, desenvolve desde a definición dos elementos básicos (punto, recta e plano) ata os poliedros regulares.

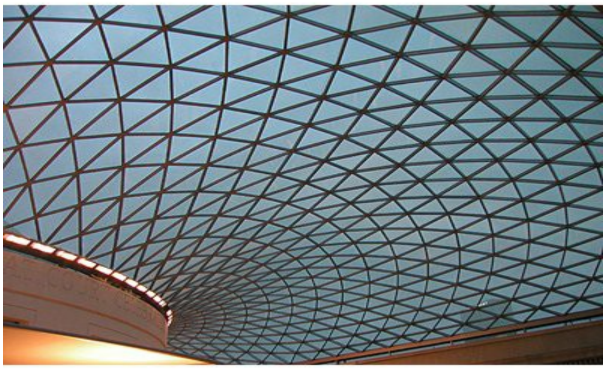
Os artistas islámicos empregaron frecuentemente as formas xeométricas nas súas obras de arte. Utilizáronse principalmente dous medios de expresión: o arabesco floral e o arabesco poligonal. O arabesco floral é unha xeometría de curvas libres e o arabesco poligonal é unha xeometría de liñas rectas. A de lazo tamén é moi frecuente, destacando o uso de estrelas de oito puntas. No medievo empregáronse, principalmente na arquitectura, formas ditadas por sinxelas regras numéricas e xeométricas, destacando o uso do arco de medio punto e do arco apuntado.

A presenza das formas xeométricas na arquitectura e no urbanismo é unha constante ao longo da historia. As formas xeométricas son formas esenciais que teñen unha forte calidade estructural e simbólica. Ao mesmo tempo, a súa simplicidade facilita a súa estruturación rítmica e proporcionada, conseguíndose así conxuntos equilibrados e ao mesmo tempo dinámicos. A presenza destas formas na natureza serve como modelo para a arquitectura e a arte, ao longo de toda a historia.

Pirámide de Kefrén en Gizeh, Exipto

Mosaico romano

Forma espiral na natureza



A xeometría na arquitectura actual

Formas poligonais na Alhambra